Problemas de flujo en redes: aplicación a redes de transporte urbano

Cristián E. Cortés
Universidad de Chile

V Escuela de Invierno, Luis A. Santaló
23-27 de Julio 2012

Outline curso

- Grafos y flujos.
- Problema de flujo a costo mínimo (FCM).
- Formulaciones de problemas particulares como FCM y familias de algoritmos de solución.
- Dualidad para FCM.
- Problemas de rutas mínimas (RM): algoritmo genérico y casos particulares: label setting, label correcting. Ecuaciones de Bellman. Extensión a caso con restricción de recursos.
- Problemas de rutas mínimas (RM): algoritmo de Floyd.
- Aplicación sobre red real de Chicago.

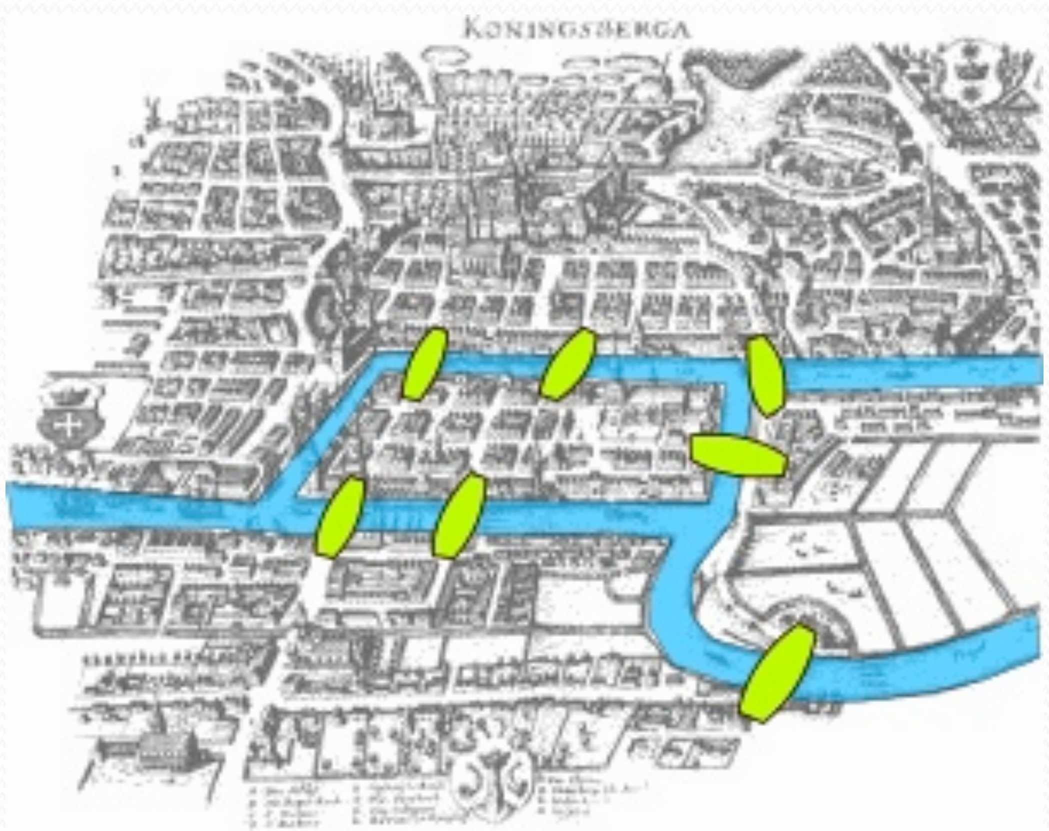
Outline curso (2)

- Caracterización del equilibrio en redes de transporte privado (Wardrop)
- Funciones de rendimiento y descripción de redes urbanas a nivel agregado.
- Formulación del equilibrio de usuario (EU) como inecuación variacional: caso demanda fija.
- Problema de optimización equivalente para EU.
- Formulación del óptimo del sistema (OS)
- Método de combinacines convexas: algoritmo de Frank-Wolfe.
- Aplicación sobre red real de Chicago.

Problema de flujo a costo mínimo

- Grafos y flujos
- Problema de flujo a costo mínimo
- Formulaciones

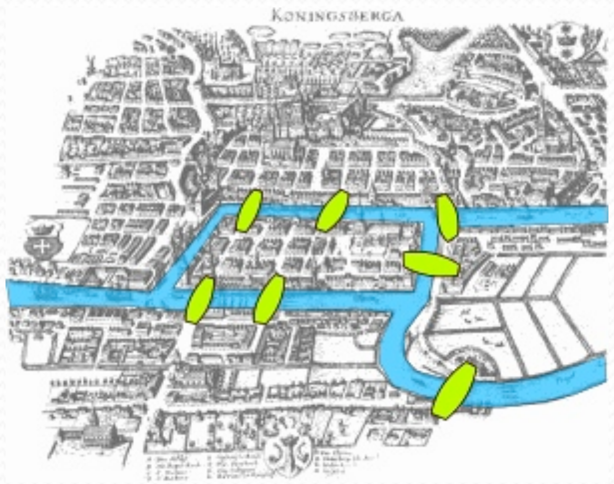
Los Puentes de Königsberg

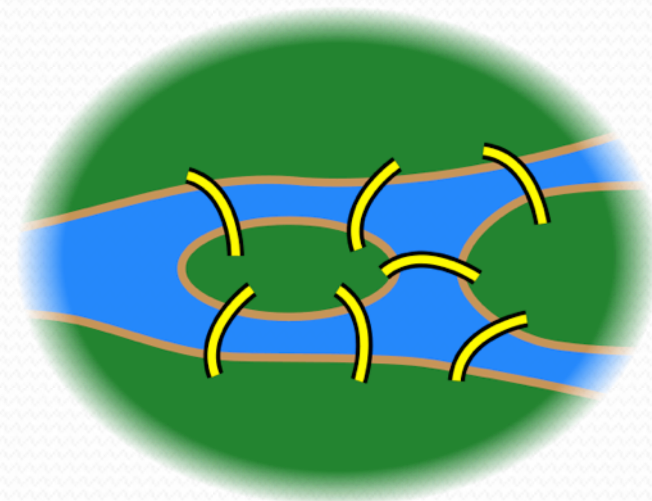


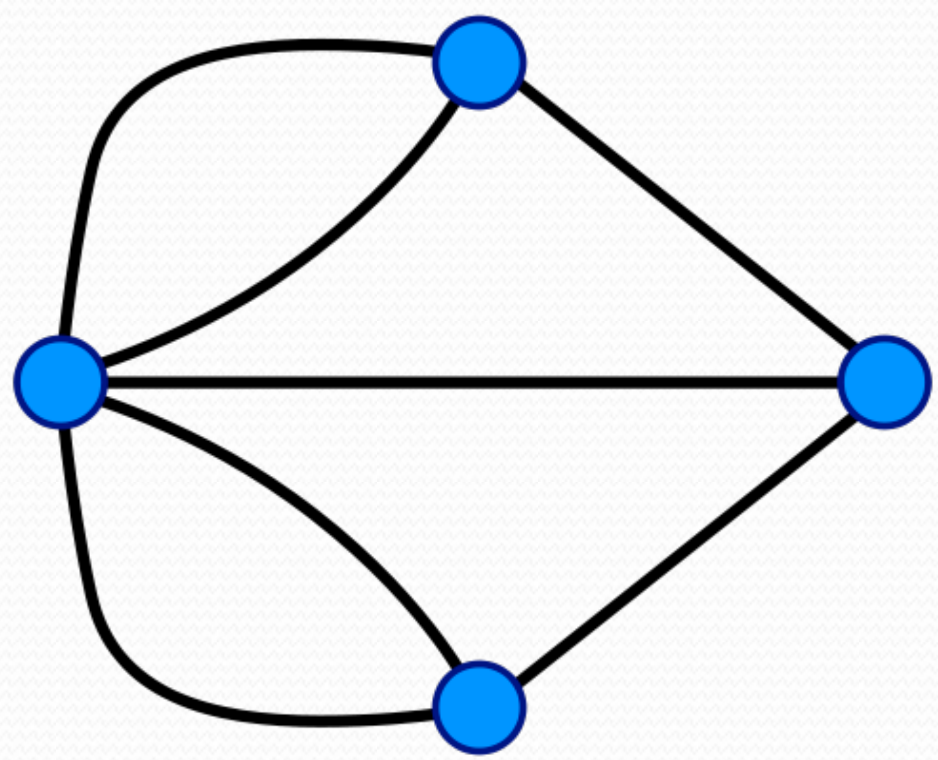
¿Es posible planificar un paseo tal que se crucen todos los puentes sin pasar por ninguno más de una vez?

En 1736, Leonard Euler estudió el problema para encontrar un viaje cerrado a través de 7 puentes en Konigsberg

Los Puentes de Königsberg







Grafos y flujos

- G(N,A), N conjunto de nodos y A conjunto de arcos.
- Grafo dirigido.
- Arco se puede ver como par ordenado (i,j), distinto a par (j,i).
- Arco (i,j) es incidente a i y a j.
- Grado de nodo i corresponde al número de arcos incidentes a i.
- Grafo completo si contiene a todos los arcos posibles.

Grafos y flujos

- Rutas y ciclos:

    - Una ruta R en un grafo dirigido es una secuencia de nodos $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ con $k \geq 2$ y una secuencia correspondiente de k-1 arcos.
    - Un ciclo es una ruta en la cual el nodo inicial y el final coinciden.
    - Una ruta es simple si no contiene ni nodos (ni arcos) repetidos (caso de ciclo mantiene definición excepto por el primero y el último nodo).
    - Un ciclo Hamiltoniano es un ciclo simple que contiene a todos los nodos del grafo.
    - Un grafo que no contiene ciclos se dice que es acíclico.

Grafos y flujos

- Un grafo se dice conexo si para cada par de nodos i y j, existe una forma de acceder desde i a j (ruta sobre grafo no dirigido), y se dice fuertemente conexo si para cada par de nodos i y j, existe una ruta (técnicamente hacia adelante) que parte en i y termina en j.
- Se puede demostrar que si un grafo es conexo y cada uno de sus nodos tiene grado par, existe un ciclo (no necesariamente hacia adelante) que contiene a todos los arcos del grafo exactamente una vez.
- Grafo G' = G'(N',A') es un subgrafo de G(N,A) si N' es subconjunto de N y A' es subconjunto de A.
- Un árbol es un grafo conexo acíclico.
- Árbol cubridor contiene a todos los nodos de G.
- Se puede demostrar que un subgrafo de G(n,A) es un árbol cubridor ssi es conexo y contiene n-1 arcos.

Flujos y divergencia

Dado G(N,A), un vector de flujos es de la forma $\{x_{ij}/(i,j) \in A\}$

Divergencia de nodo i

$$y_i = \sum_{j \in O(i)} x_{ij} - \sum_{j \in D(i)} x_{ji} \quad \forall\, i \in N$$

$y_i > 0$ fuente

$y_i = 0$ transferencia

$y_i < 0$ sumidero

Si $y_i = 0 \quad \forall\ i\ \in N$ $\Longrightarrow$ Circulación

Restricciones de capacidad $b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall\ (i,j) \in A$

Problema lineal genérico

Problema de flujo a costo mínimo (FCM)

$$Min \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} - \sum_{j\in D(i)} x_{ji} = s_i, \quad \forall\, i \in N$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in A$$

donde
$$O(i) = \{j \in N \mid (i,j) \in A\}$$
$$D(i) = \{j \in N \mid (j,i) \in A\}$$

Formulación de problemas como FCM

- Problema de rutas mínimas
- Problema de asignación
- Problema de flujo máximo
- Problema de transporte (sin y con trasbordos)
- Problema convexo de flujo en redes
- Problemas de flujo multicommodity
- Problema del vendedor viajero

Problema de rutas mínimas

$$Min \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} - \sum_{j\in D(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s \\ -1 & i = t \\ 0 & i \neq s,t \end{cases} \quad , \qquad \forall\, i \in N$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\, (i,j) \in A$$

Solución del tipo

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ (i,j) \in R \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

R es RM entre s y t

Propiedad importante: para el problema FCM con oferta en nodos y cotas en arcos enteras: si existe solución óptima, entonces existe solución óptima entera.

Problema de asignación

$$Max \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij} \equiv Min \sum_{(i,j)\in A} -a_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} = 1, \quad \forall\, i: 1, \dots, n$$

$$\sum_{i\in D(j)} x_{ij} = 1, \quad \forall\, j: 1, \dots, n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad \forall\, (i,j) \in A$$

Problema de máximo flujo

$$Max\ x_{ts} \equiv Min - x_{ts}$$

s.a.

$$\sum_{j \in O(i)} x_{ij} - \sum_{j \in D(i)} x_{ji} = 0, \quad \forall\, i \in N, i \neq s, t$$

$$\sum_{j \in O(s)} x_{sj} = \sum_{i \in D(t)} x_{it} = x_{ts}$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in A, (i,j) \neq (t,s)$$

Problema de transporte

$$Min \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} = \alpha_i, \quad \forall\, i: 1, \dots, m$$

$$\sum_{i\in D(j)} x_{ij} = \beta_j, \quad \forall\, j: 1, \dots, n$$

$$0 \le x_{ij} \le min\{\alpha_i, \beta_j\} \qquad \forall\, (i,j) \in A$$

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j$$

Problema de transporte (transferencias)

$$Min \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} = \alpha_i, \quad \forall\, i \in F$$

$$\sum_{i\in D(j)} x_{ij} = \beta_j, \quad \forall\, j \in S$$

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} - \sum_{j\in D(i)} x_{ji} = 0, \quad \forall\, i \in T$$

$$b_{ij} \le x_{ij} \le c_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in A$$

Problema de flujo en redes no lineal convexo

$$Min \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}(x_{ij})$$

s.a.

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} - \sum_{j\in D(i)} x_{ji} = s_i, \quad \forall\, i \in N$$

$$x_{ij} \in \mathrm{X}_{ij} \qquad \forall\,(i,j) \in A$$

Problema de flujo multicommodity

$$Min \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}(x_{ij})$$

s.a.

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij}(m) - \sum_{j\in D(i)} x_{ji}(m) = \begin{cases} r_m & i = i_m \\ -r_m & i = j_m \\ 0 & si\ no \end{cases} \quad ,$$

$$x_{ij} = \sum_{m=1}^{M} x_{ij}(m)$$

Problema del vendedor viajero (TSP) Problema de flujo en redes discreto

$$Min \sum_{(i,j)\in T} a_{ij}x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,N \\ j\neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall\, i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,N \\ i\neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall\, j = 1, \dots, N$$

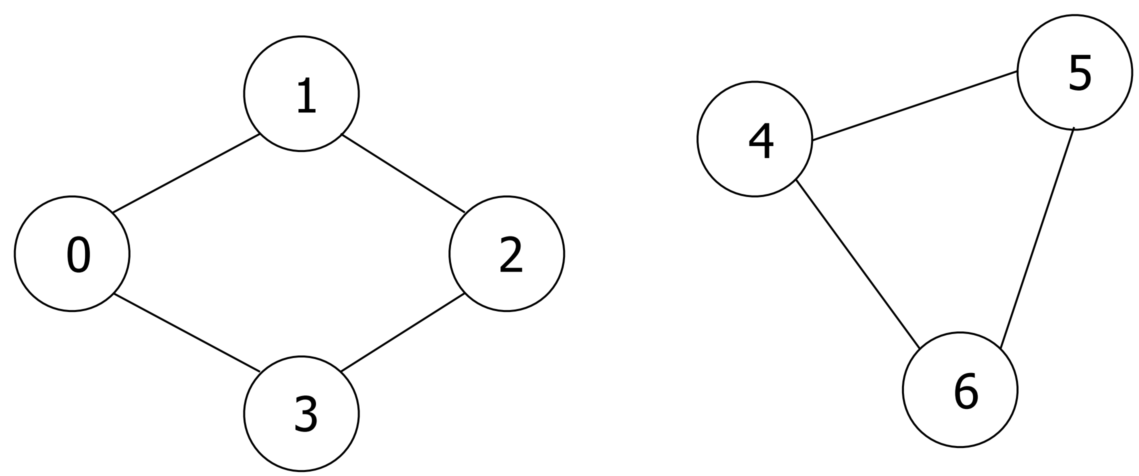
El subgrafo G(N,A') donde A'= $\left\{(i,j)/x_{ij} = 1\right\}$ debe ser conexo

Problema del Vendedor Viajero

- Función objetivo:

$$Min \sum_{(i,j)\in T} a_{ij} x_{ij}$$

- Ejemplo:



Para evitar lo anterior se debe utilizar la siguiente restricción:

$$x_{45} + x_{56} + x_{64} \leq 3 - 1 = 2$$

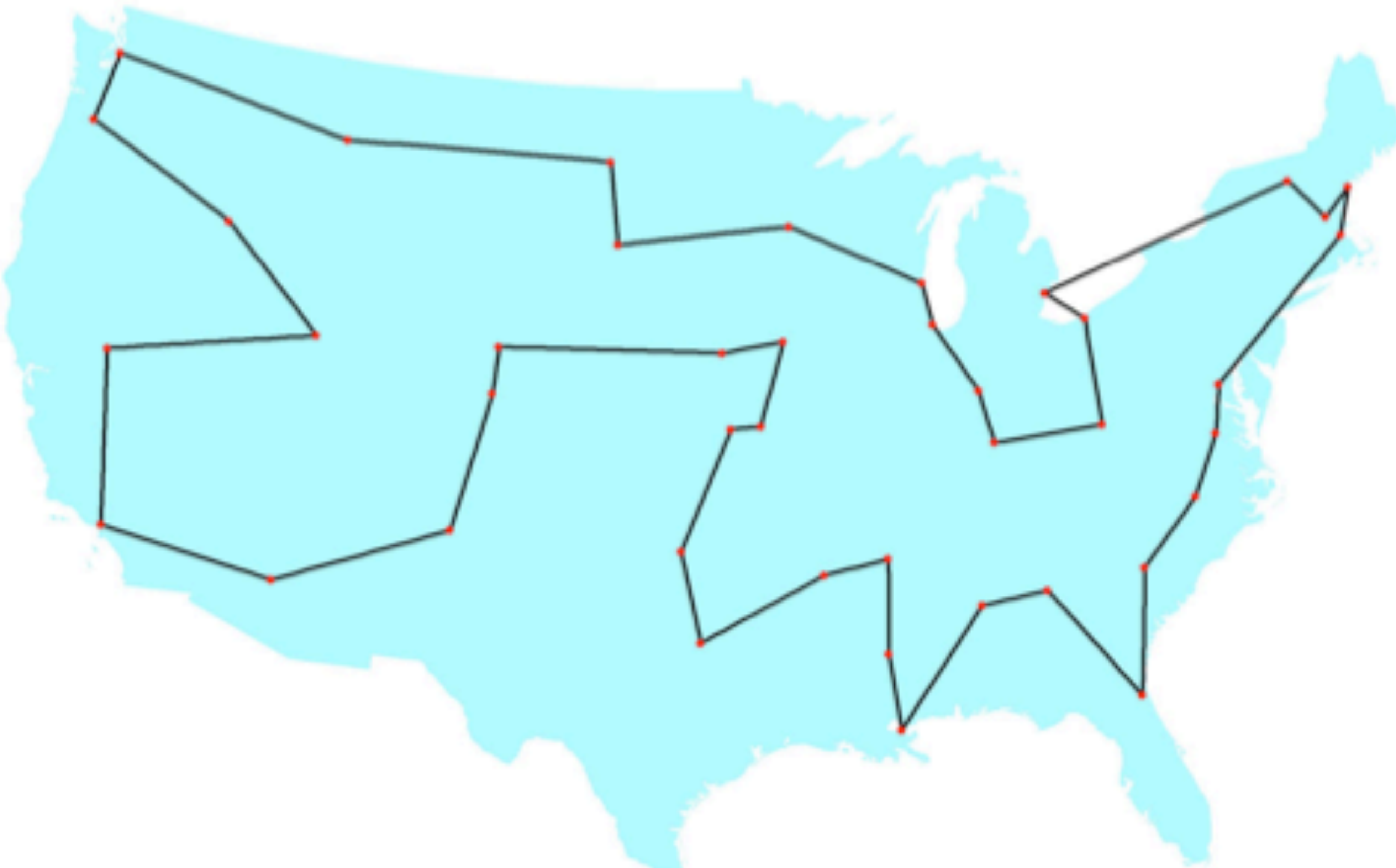
En forma genérica:

$$\sum_{(i,j):i\in S, j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall\, 2 \leq S \leq n-2.$$

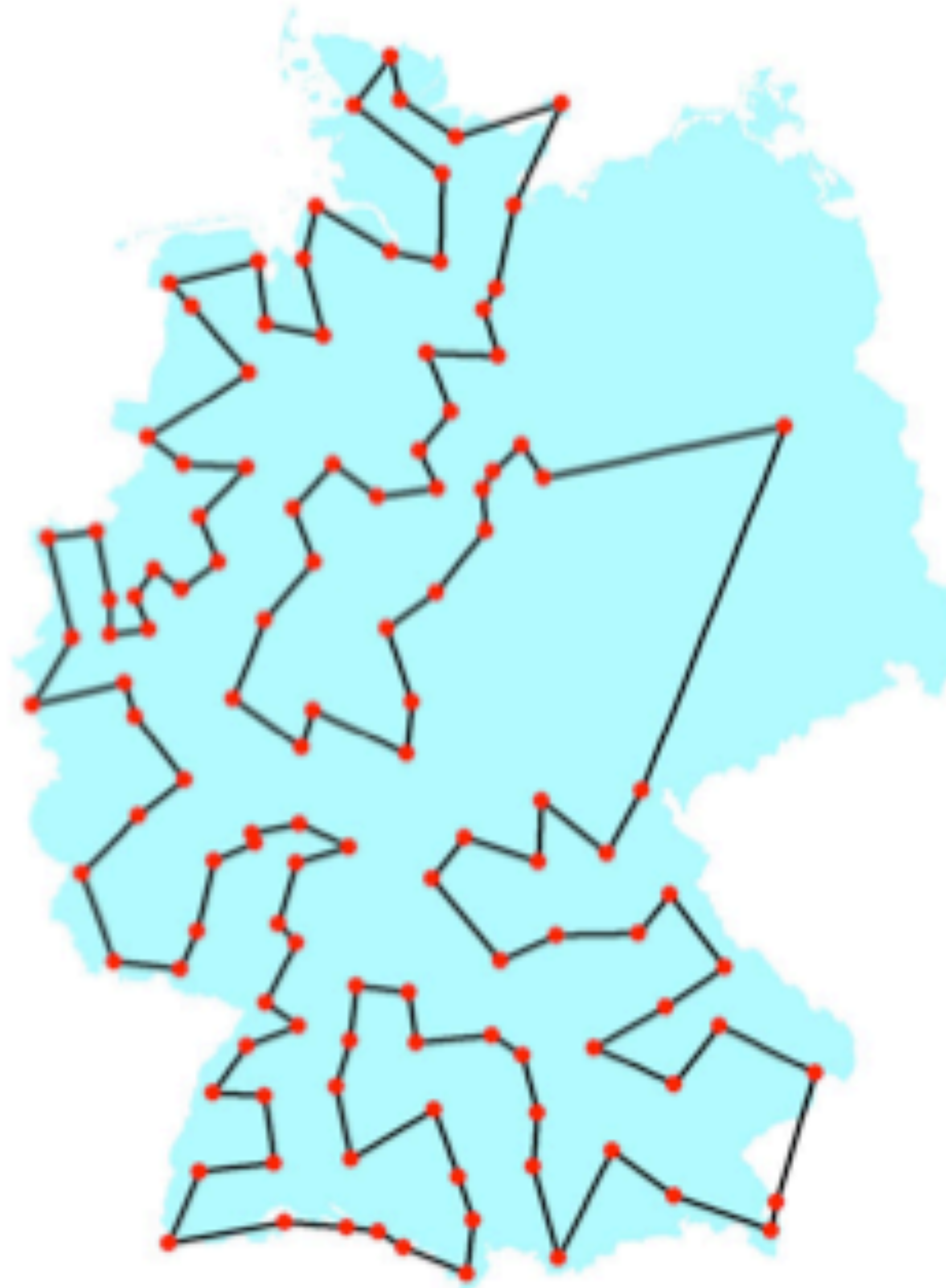
Las cosas no son tan malas como parece

- Métodos exactos demoran tiempo exponencial en los peores casos (instancias más complejas)
- Instancias de la vida real no son realmente tan difíciles
- Existen muchas heurísticas disponibles, que encuentran soluciones de muy buena calidad en tiempo razonable
- En el último tiempo se han desarrollado técnicas sofisticadas que en muchos casos obtienen el óptimo, o bien soluciones muy cercanas al óptimo (Meta-hueristics, cutting-plane, branch-and-cut)

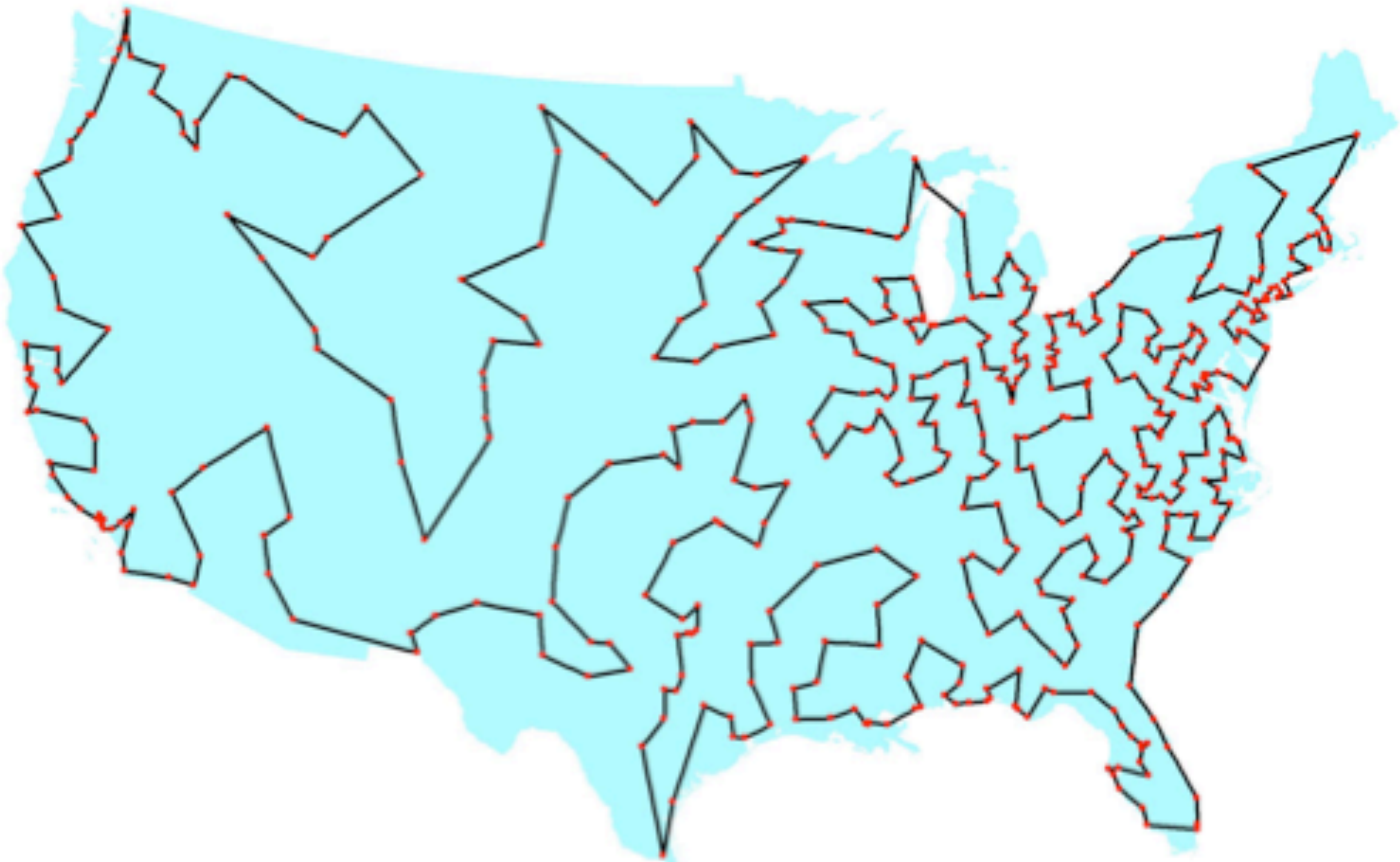
Progress: 42 cities (Dantzig *et al.*, 1954)



Progress: 120 cities (Grötschel, 1977)

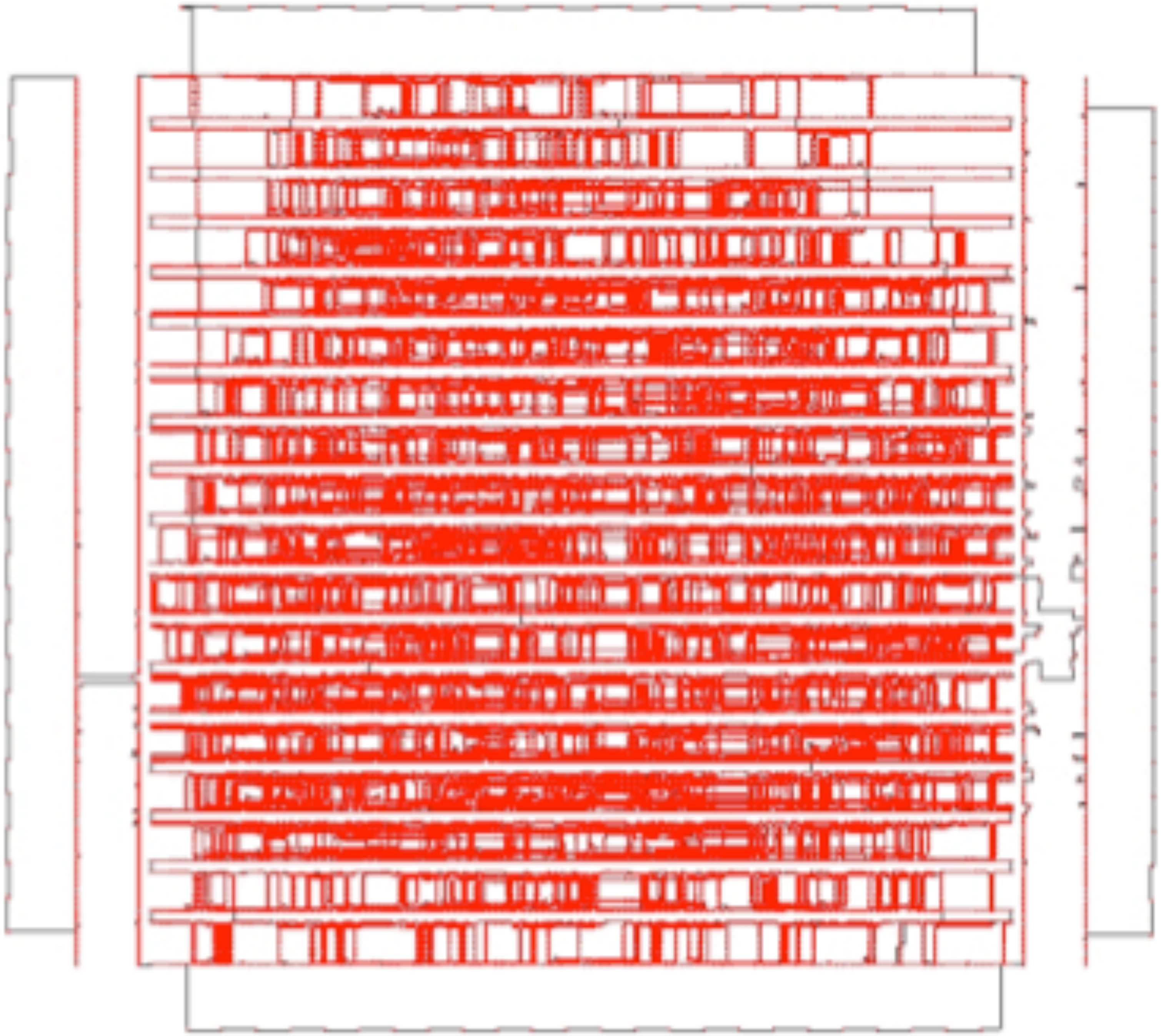


Progress: 532 cities (Padberg & Rinaldi, 1987)

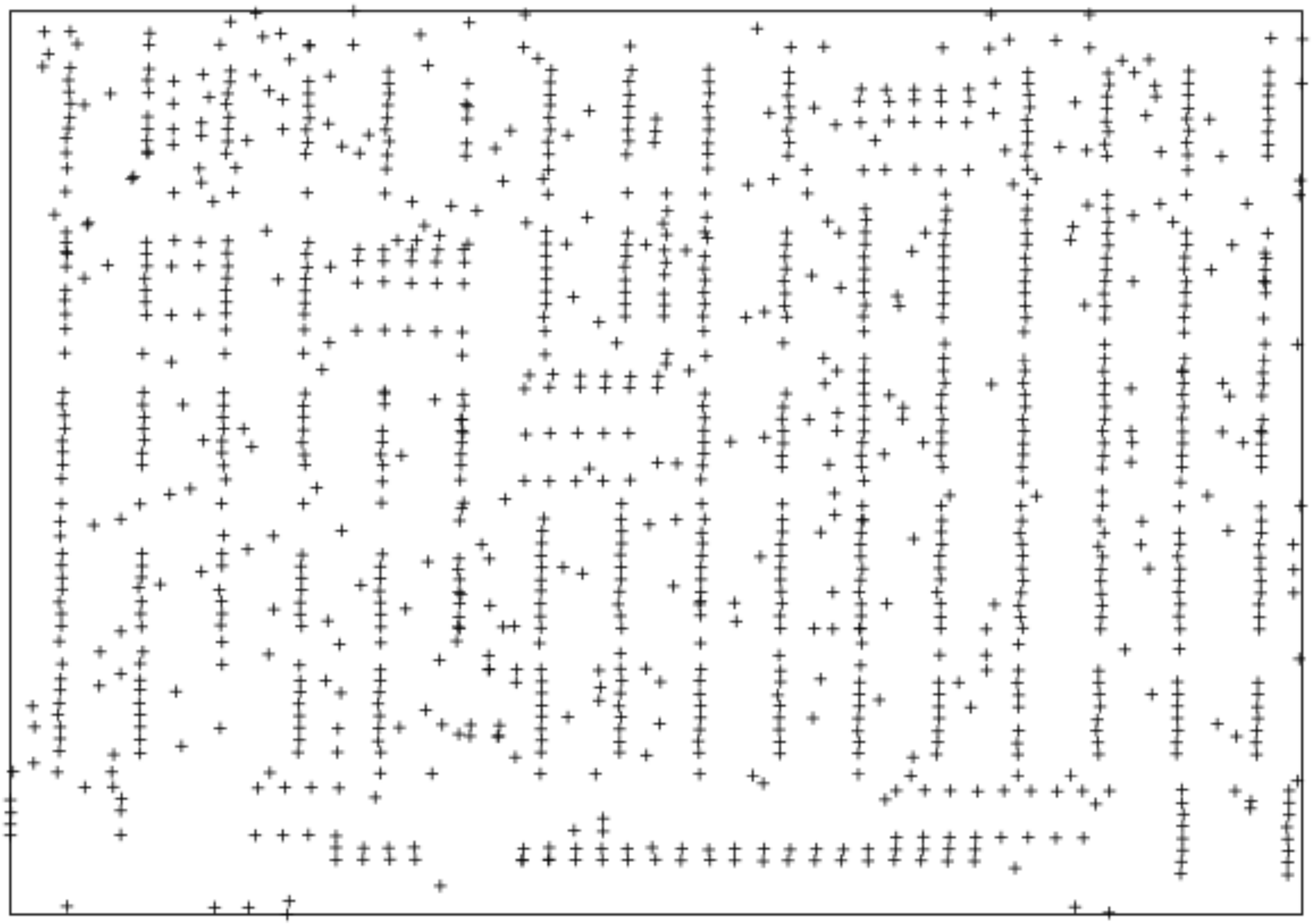


Progress: 13509 cities (Applegate *et al.*, 1998)

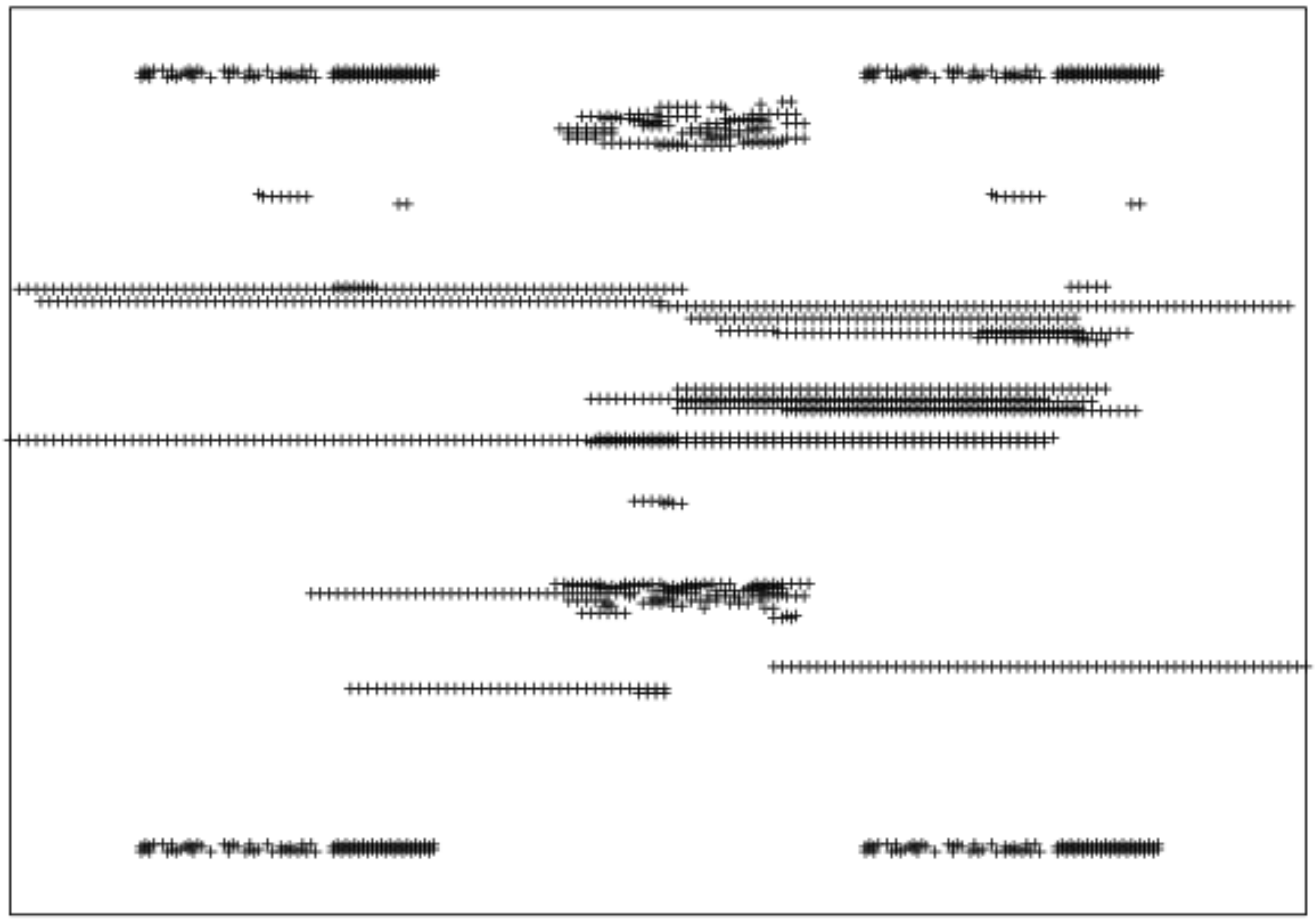
Progress: 85900 cities (Cook *et al.*, 2006)



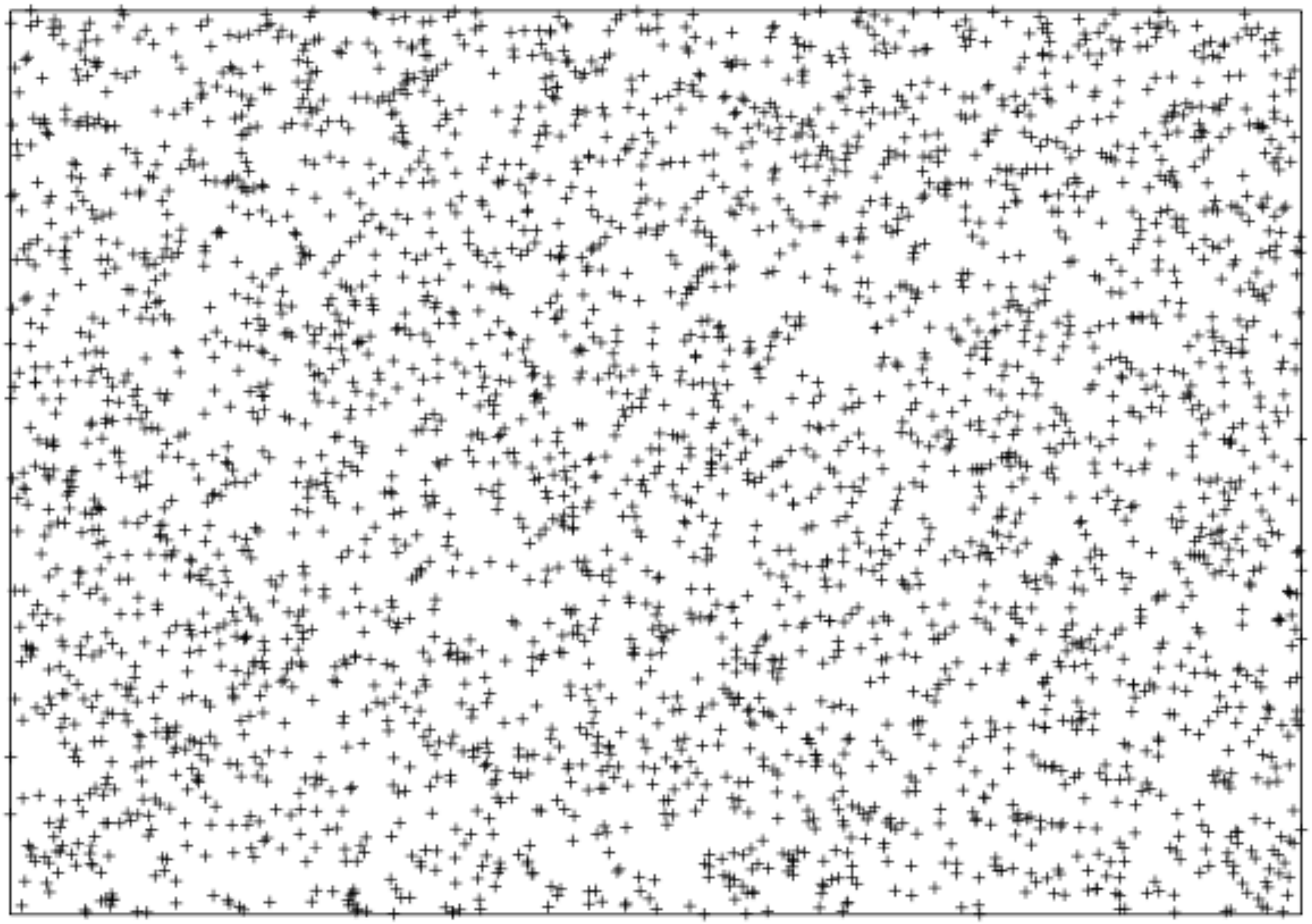
Instancias de prueba: difíciles!!!



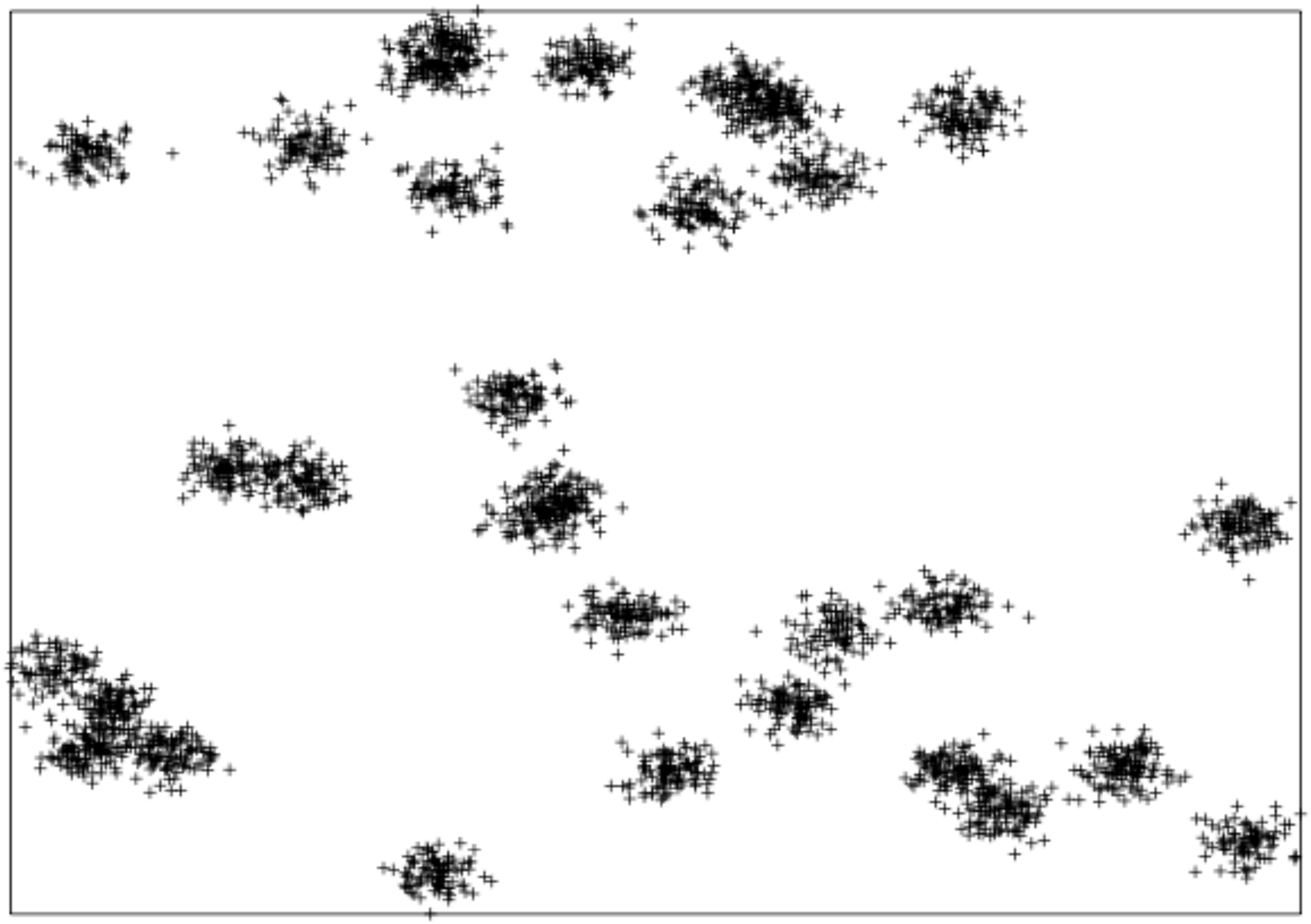
Instancias de prueba: difíciles!!!



Instancias de prueba: difíciles!!!



Instancias de prueba: difíciles!!!



Algoritmos de solución para el FCM

- Mejora al costo primal
- Mejora al costo dual (holgura complementaria)